

Exercice 1.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition " $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n C_n^k u_{p+k} = u_{2n+p}$."

– $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $C_0^0 u_p = u_p, \forall p \in \mathbb{N}$.

– Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. $\mathcal{P}(n+1)$ vraie ?

Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u_{p+k} &= u_p + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k u_{p+k} + u_{p+n+1} \\ &= u_p + \sum_{k=1}^n (C_n^{k-1} + C_n^k) u_{p+k} + u_{p+n+1} \quad (\text{par la formule du triangle de Pascal}). \end{aligned}$$

Mais $u_p + \sum_{k=1}^n C_n^k u_{p+k} = \sum_{k=0}^n C_n^k u_{p+k} = u_{2n+p}$ car $\mathcal{P}(n)$ est vraie,

et $u_{p+n+1} + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} u_{p+k} = u_{p+n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k u_{p+k+1} = \sum_{k=0}^n C_n^k u_{p+1+k} = u_{2n+p+1}$ (on applique $\mathcal{P}(n)$ avec $p+1$).

Il s'ensuit $\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u_{p+k} = u_{2n+p} + u_{2n+p+1} = u_{2(n+1)+p}$, ce qui montre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

–

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}(0) \text{ vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \text{ vraie} \Rightarrow \mathcal{P}(n+1) \text{ vraie} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{P}(n) \text{ vraie, pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 2.

1) Soient X et Y deux parties de E telles que $X \subset Y$. Alors $X \cap A \subset Y \cap A$, et $(X \cap A) \cup B \subset (Y \cap A) \cup B$. Donc $f(X) \subset f(Y)$, et f est une application croissante.

2) On a

$$f(X) = (X \cup B) \cap (A \cup B)$$

donc A n'intervient que dans l'expression $A \cup B$, et par suite peut être remplacée par toute partie A' vérifiant $A \cup B = A' \cup B$. La partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ est donc l'ensemble des parties A' de E telles que $A \cup B = A' \cup B$.

Soient x un élément de $A \setminus B$ et A' un élément de $\mathcal{A}$. Comme x est dans $A' \cup B$ sans être dans B , x appartient à A' , ce qui prouve que $A \setminus B \subset A'$. Donc $A \setminus B$ est un minorant de $\mathcal{A}$. De plus, $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$, ce qui montre que le plus petit élément de $\mathcal{A}$ est $A \setminus B$.

3) Pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$B \subset f(X) \subset A \cup B.$$

Soit Y un élément de $\mathcal{P}(E)$ tel que $B \subset Y \subset A \cup B$. Alors

$$f(Y) = (Y \cup B) \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B) = Y$$

ce qui prouve que $Y \in \mathcal{P}(E)$.

Donc $f(\mathcal{P}(E)) = \{Y \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset Y \subset A \cup B\}$.

4) La relation $\sim$ est clairement une relation d'équivalence. Si X et Y sont deux parties de E , alors

$$X \sim Y \Leftrightarrow (X \cap A) \cup B = (Y \cap A) \cup B.$$

Si on remplace A par $A \setminus B$, on trouve

$$X \sim Y \Leftrightarrow (X \cap (A \setminus B)) \cup B = (Y \cap (A \setminus B)) \cup B$$

et comme $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$,

$$X \sim Y \Leftrightarrow X \cap (A \setminus B) = Y \cap (A \setminus B).$$

Donc la classe $\mathcal{X}$ d'un élément $X \in \mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties Y de E telles que $X \cap (A \setminus B) = Y \cap (A \setminus B)$.

Exercice 3.

1) La relation $\prec$ est :

– *réflexive*, car pour tout élément O de $\mathcal{O}(E)$, on a

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad xOy \Rightarrow xOy.$$

donc

$$\forall O \in \mathcal{O}(E), \quad O \prec O ;$$

– *antisymétrique*, car si on a $O_1 \prec O_2$ et $O_2 \prec O_1$, où O_1 et O_2 sont des éléments de $\mathcal{O}(E)$, on en déduit

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad xO_1y \Rightarrow xO_2y \text{ et } xO_2y \Rightarrow xO_1y$$

c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad xO_1y \Leftrightarrow xO_2y$$

et par suite $O_1 = O_2$;

– *transitive*, car si O_1 , O_2 et O_3 sont trois éléments de $\mathcal{O}(E)$ tels que $O_1 \prec O_2$ et $O_2 \prec O_3$, on a

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad xO_1y \Rightarrow xO_2y \text{ et } xO_2y \Rightarrow xO_3y$$

donc

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad xO_1y \Rightarrow xO_3y$$

ce qui montre que $O_1 \prec O_3$.

La relation $\prec$ définit bien une relation d'ordre sur $\mathcal{O}(E)$.

2) L'égalité sur l'ensemble E est un élément de $\mathcal{O}(E)$, et pour toute relation d'ordre O sur E , on a

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad x = y \Rightarrow xOy$$

donc l'égalité est le plus petit élément de $\mathcal{O}(E)$.

3) Soit O_1 une relation d'ordre sur E telle que $O \prec O_1$. Il s'agit de montrer qu'alors $O_1 = O$. Montrons que $O_1 \prec O$. Soit $(x, y) \in E \times E$ tels que xO_1y . Comme l'ordre O est total, x et y sont comparables. Si yOx , alors comme $O \prec O_1$ on a aussi yO_1x et par suite $x = y$ et xOy . On a donc

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad xO_1y \Rightarrow xOy$$

ce qui montre que $O_1 \prec O$ et ainsi $O = O_1$.

Donc O est un élément maximal de $\mathcal{O}(E)$.

4) La relation S est :

– *réflexive*, car $\forall x \in E, xRx$ et donc xSx ;

– *antisymétrique* : Soient x et y deux éléments de E tels que xSy et ySx . Étudions les quatre possibilités :

a) Si xRy et yRx , on a $x = y$ car R est antisymétrique.

b) Si xRy et $(yRa$ et $bRx)$, alors d'après la transitivité de R , on a xRa et bRx , et donc bRa ce qui est impossible puisque a et b ne sont pas comparables par R .

c) Si $(xRa$ et $bRy)$ et yRx , on a de même xRa et bRx ce qui donne bRa qui est impossible.

d) Si $(xRa$ et $bRy)$ et $(yRa$ et $bRx)$, on a bRa , ce qui est impossible.

Ainsi, xSy et ySx entraîne $x = y$;

– *transitive* : Soient x, y, z trois éléments de E vérifiant xSy et ySz . Étudions les cas possibles :

a) Si xRy et yRz , on a xRz car R est transitive.

b) Si xRy et $(yRa$ et $bRz)$, on a xRa et bRz , et donc xSz .

c) Si $(xRa$ et $bRy)$ et yRz , on a de même xRa et bRz ce qui donne xSz .

d) Si $(xRa$ et $bRy)$ et $(yRa$ et $bRz)$, on a bRa , ce qui est impossible.

On voit donc que dans tous les cas, xSz .

Donc S est bien un élément de $\mathcal{O}(E)$, et S est distincte de R car les éléments a et b vérifient aRa et bRb ce qui implique aSb , alors que a et b ne sont pas comparables par R . Enfin il est clair, de par la définition de S , que R est plus fine que S .

5) On a vu que les ordres totaux étaient des éléments maximaux de $\mathcal{O}(E)$ et que si une relation d'ordre n'est pas totale, elle admet un majorant strict. Donc l'ensemble des éléments maximaux de $\mathcal{O}(E)$ est égal à l'ensemble des ordres totaux sur E .